შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 158

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(x+y+z)$ — უნდა დავამტკიცოთ.

პირობის თანახმად $f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$.
y-ის მაგივრად 0-ის ჩასმით მივიღებთ:

$f(x)+f(0) \geq 2f(x)$ ანუ $f(x)+f(0) \geq f(x)+f(x)$

ანუ $f(0) \geq f(x)$, ახლა $f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$ y-ის მაგივრად $(-x)$ ჩავსვათ, და მივიღებთ:

$f(x)+f(-x) \geq 2f(0)$ ~~ხოლო~~ $f(0) \geq f(x)$, ამიტომ სამართლიანი იქნება შემდეგი: $f(x)+f(-x) \geq 2f(x)$.
ანუ $f(x)+f(-x) \geq f(x)+f(x)$ ანუ $f(-x) \geq f(x)$.
მივიღეთ რომ ნებისმიერი x-ისთვის $f(-x) \geq f(x)$.
მაშინ $f(-(-x)) \geq f((-x))$ ესეც სამართლიანია,
ანუ მივიღეთ, რომ $f(-x) \geq f(x)$ და $f(x) \geq f(-x)$.
გამოდის, რომ $f(x)=f(-x)$.

$f(x)+f(-x) \geq 2f(0)$

იგივეა რაც $2f(x) \geq 2f(0)$, რადგან $f(x)=f(-x)$,

ანუ $f(x) \geq f(0)$, ამავდროულად, როგორც $f(x)+f(0) \geq 2f(x)$ უტოლობიდან ჩანს, $f(0) \geq f(x)$.

რადგან $f(x) \geq f(0)$ და $f(0) \geq f(x)$,

ამიტომ $f(x) = f(0)$.

ეს ვაჩვენეთ, რომ ~~ნებისმიერი~~ $f(x)=f(0)$ ნებისმიერი x-ისთვის.

რადგან განსხვავებული a და b ნამდვილი რიცხვებისთვის $f(a)=f(0)$ და $f(b)=f(0)$ ამიტომ $f(a)=f(b)$ ნებისმიერი a და b-სთვის.

დასამტკიცებელი გვქონდა უტოლობა:

$$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(x+y+z)$$

$$f(x)=f(y)=f(z)=f(x+y+z)$$

და თითოვე აღვნიშნოთ k-თი.

მაშინ უნდა დავამტკიცოთ უტოლობა:

$$k+k+k \geq 3k$$

რაც უკვე ცხადია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

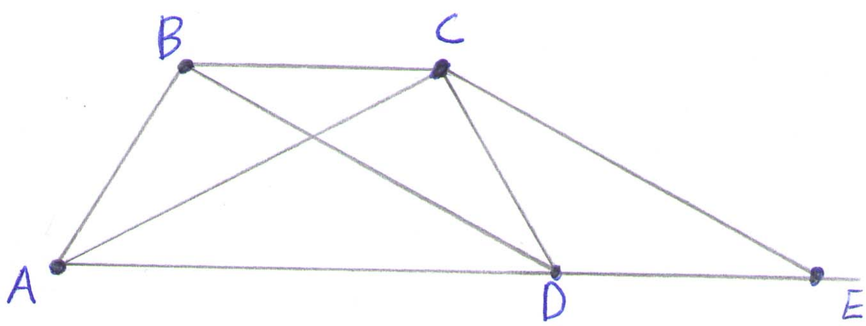
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 158

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



ABCD ტრაპეცია გვაქვს, სადაც $BC \parallel AD$.

AD-ს გაგრძელებაზე გადავდოთ DE მონაკვეთი, ისე, რომ $DE=BC$.

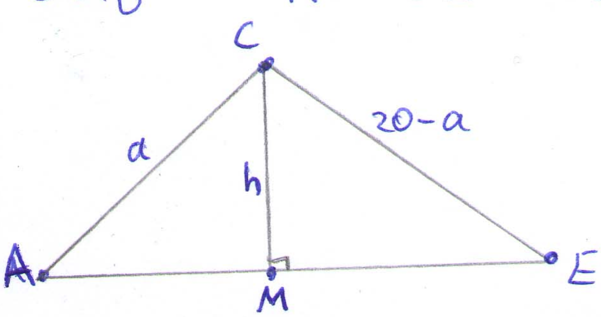
შევნიშნოთ ~~ACD~~ ACE სამკუთხედის სიმაღლე (h) იგივეა, რაც ტრაპეციის სიმაღლე.

$\triangle ACE$-ს ფართობია $\frac{h(AD+DE)}{2}$ ხოლო ტრაპეციისა კი $= \frac{h(AD+BC)}{2}$. ვინაიდან $DE=BC$, ამიტომ სამკუთხედის და ტრაპეციის ფართობები ტოლია. ასევე, პირობის თანახმად დიაგონალების ჯამი 20-ია. ანუ $AC+BD=20$. BCED პარალელოგრამია, $BD=CE$, ამიტომ $AC+CE=20$. მივიღეთ ACE სამკუთხედი, რომლის ფართობია 50.

AC და EC-ს ჯამი 20,

და გვაინტერესებს

AE-ზე დაშვებული სიმაღლე-h.



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

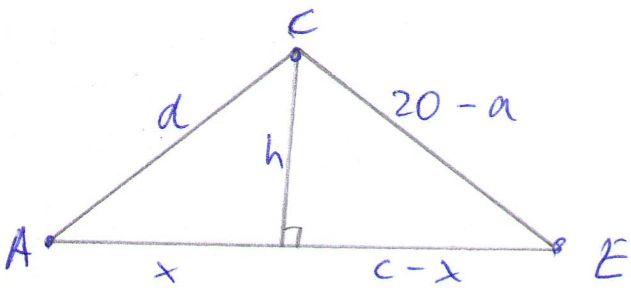
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 158

ამოცანა № 2

გვერდი № 2



$$x^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 + (c-x)^2 = (20-a)^2$$

$$\frac{ch}{2} = 50$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 158

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ვიღოთ a, b, c რიცხვები და დავშალოთ ისინი შემდეგნაირად:

$$a = X \cdot U_{AB} \cdot U_{AC} \cdot A$$
$$b = X \cdot U_{AB} \cdot U_{BC} \cdot B$$
$$c = X \cdot U_{BC} \cdot U_{AC} \cdot C$$

სადაც X არის უსგ(a, b, c), $X \cdot U_{AB}$ არის უსგ(a, b), $X \cdot U_{BC}$ არის უსგ(b, c), ხოლო $X \cdot U_{AC}$ არის უსგ(a, c).

ცხადია, რომ $X, U_{AB}, U_{BC}, U_{AC}, A, B, C$ ექვსივე ეს რიცხვი ერთმანეთთან წყვილ-წყვილად თანამარტივია.

$a+b+c \vdots b$ ანუ $a+c \vdots b$

ანუ $X U_{AB} U_{AC} A + X U_{BC} U_{AC} C \vdots X U_{BC} U_{AB} B$

საიდანაც $X U_{AC} (U_{AB} A + U_{BC} C) \vdots X U_{BC} U_{AB} B$

ანუ $U_{AC} (U_{AB} A + U_{BC} C) \vdots U_{BC} U_{AB} B$

აქ U_{AC} თანამარტივია U_{BC}, U_{AB} და B-სთან, ამიტომ

$$U_{AB} A + U_{BC} C \vdots U_{BC} U_{AB} B$$

ე.ი. $U_{AB} A \vdots U_{BC}$ და $U_{BC} C \vdots U_{AB}$.

რადგან $(U_{AB}, U_{BC}) = 1$ და $(A, U_{BC}) = 1$ ამიტომ $U_{BC} = 1$.

ანალოგიურად U_{AB}-ც 1-ის ტოლია. იგივეს ვიტყვით U_{AC}-ზეც.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 158

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$a = X u_{AB} u_{AC} A$

$b = X u_{AB} u_{BC} B$ ვთქვათ, რომ $u_{AB} = u_{AC} = u_{BC} = 1$.

$c = X u_{AC} u_{BC} C$

მაშინ გამოდის, რომ გვაქვს შემდეგი სახის რიცხვები:

$a = X \cdot A$

$b = X \cdot B$ სადაც X, A, B, C ისეთი რიცხვები ერთმანეთის წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივია.

$c = X \cdot C$

$$XA + XB + XC \vdots XB$$

$$XA + XB + XC \vdots XA$$

$$XA + XB + XC \vdots XC$$

აქ ცხადდება შემდეგი: $A+B+C \vdots B$, $A+B+C \vdots A$, $A+B+C \vdots C$.

და რადგან A, B, C რიცხვები ერთმანეთთან ურთიერთმარტივია

ამიტომ $\cancel{A+B+C \vdots A+B+C}$.

$$A+B+C \vdots ABC$$

ანუ $A+B+C = KABC$

ვიპოვოთ ყველა შესაძლო (A,B,C) სამეული

და მაშინ მივიღებთ $a = XA$, $b = XB$ და $c = XC$ სახის რიცხვებს.

ე.ი. ამოვხსნათ $A+B+C = KABC$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 158

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

$A+B+C = KABC$ სადაც K, A, B, C ნატურალური რიცხვებია.
თუ A,B,C რიცხვებიდან ერთი მაინც არის ოთხზე მეტი,
მაშინ ტოლობა ვერ შესრულდება, რადგან მარჯვენა მხარე
მარცხენაზე მეტი იქნება. ანუ $A, B, C < 4$.
მაშინ A,B,C შეიძლება იყოს:

1) $\{1, 1, 1\}$ $a=XA$, $b=XB$, $c=XC$ რადგან $a,b,c \leq 2010$
ამიტომ $1 \leq X \leq 2010$.
ანუ ეს $\underline{2010}$ ვარიანტია.

2) $\{2,1,1\}$, $\{1,1,2\}$ და $\{1,2,1\}$
ამ შემთხვევაში $X \leq 1005$ ანუ თითოეული ~~[illegible]~~
გადანაცვლებისთვის გვაქვს 1005 ვარიანტი, ანუ ჯამში $1005 \cdot 3 = \underline{3015}$ ვარიანტი

3) $\{1, 2, 3\}$ და მისი კიდევ 5 ~~[illegible]~~ გადანაცვლება:
$\{1,3,2\}$, $\{2,1,3\}$, $\{2,3,1\}$, $\{3,2,1\}$, $\{3,1,2\}$
ამ შემთხვევაში $X \leq (2010/3) = 670$, ანუ თითო-
ეულისთვის გვაქვს 670, ანუ ჯამში $670 \cdot 6 = \underline{4020}$ ვარიანტი

პასუხი: ასეთი დალაგებული სამეულების რაოდენობა
არის $2010+3015+4020 = \underline{9045}$